Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Sintesi

Le costruzioni con riga e compasso: un approccio didattico

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Candidato

Federica Papa

Parole chiave: costruzioni con riga e compasso

MRcode: 01A20, 01A50, 5103

Anno Accademico 2010-2011

Sintesi

In questo elaborato si affronta il tema delle costruzioni con riga e compasso in quanto esse hanno avuto un ruolo fondamentale nella storia della matematica greca.
La risolubilità di problemi geometrici e il raggiungimento di una soluzione tramite i due strumenti elementari è stata una questione centrale nella Grecia antica. Basti pensare ai tre problemi classici: la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio, ai quali è possibile aggiungere anche il cosiddetto problema della ciclotomia, ovverosia la costruzione di un poligono regolare di n lati. Nonostante i greci fossero già in grado di risolvere i suddetti quesiti mediante l'utilizzo di altri mezzi meccanici, essi continuarono a considerare tali costruzioni come insolute, in quanto non svolte per mezzo degli strumenti elementari.
Le difficoltà riscontrate, e protrattesi nei secoli a seguire, crearono un sostanziale scetticismo. Ci si accostò quindi al problema in ottica algebrica, fornendo così un vitale impulso allo sviluppo di nuove discipline quali, ad esempio, la teoria dei campi.
Si giunse poi a confermare come i tre problemi classici siano realmente irrisolvibili mediante la sola riga ed il compasso, mentre il problema della ciclotomia arrivò a nuove soluzioni grazie agli studi eseguiti da Gauss. L'analisi delle equazioni ciclotomiche portò, infatti, il matematico ad una completa caratterizzazione dei poligoni costruibili.
Per poter ampliare ulteriormente il numero dei poligoni costruibili si necessita però dell'uso di un altro mezzo, per esempio la riga marcata. A tal proposito François Viète mostrò come, fornendosi di questo strumento, fosse possibile costruire il poligono regolare avente sette lati.
Al contrario, il matematico danese G. Mohr e, indipendentemente, l'italiano Mascheroni, mostrarono come ogni figura costruibile con riga e compasso lo sia anche per mezzo del solo compasso, mentre Steiner, risolvendo una congettura del matematico Poncelet, dimostrò come lo stesso risultato sia raggiungibile attraverso la

sola riga, una volta assegnata una circonferenza ausiliaria di centro fissato.

Particolare attenzione merita inoltre l'aspetto didattico. Per più di 2000 anni, infatti, la matematica si è quasi identificata con la geometria elementare delle costruzioni presente nel testo 'Gli *Elementi* di Euclide' (opera in 13 libri databile 300 a.C. e fondamento dell'istruzione scolastica fino al 20° secolo). Nonostante il recente disinteresse, lo studio delle costruzioni con riga e compasso gode oggi di rinnovato interesse per merito degli innovativi software ad interfaccia grafica quali GeoGebra e Cabrì.

Tale argomento affrontato con l'utilizzo dei software dinamici offre un ottimo contesto per introdurre gli studenti alla geometria come sistema teorico. A tal scopo è stata presentata una proposta didattica per gli studenti della prima media dal tema 'La matematica nelle costruzioni con riga e compasso'.

Nel dettaglio la tesi è così organizzata:

Nel primo capitolo vengono dapprima presentati i due strumenti da utilizzare nelle costruzioni geometriche, la riga non graduata e il compasso molle, e commentata la scelta da parte dei greci di utilizzare proprio tali strumenti. Attraverso, poi, i primi tre postulati degli *Elementi* di Euclide, si evidenziano le regole con cui utilizzarli, sottolineando che la riga ed il compasso sono strumenti ideali con caratteristiche ben definite con cui risolvere dei problemi. Essi, nella loro semplicità e purezza, permettono di costruire le figure geometriche in modo teoricamente perfetto e rigoroso all'interno di un dato sistema di regole.

Successivamente è stato definito formalmente il gesto intuitivo della costruzione di una figura geometrica con il solo aiuto di una riga non graduata e di un compasso.

Definizione 1. *Una costruzione è una successione di punti, rette e circonferenze in cui gli elementi K_i, $i \leq m$, sono dati, mentre per ogni K_i, $i > m$, vale una delle seguenti condizioni:*

1. *se K_i è un punto, esso o è già presente nella costruzione (K_h, $h < i$) oppure*

esistono due curve distinte K_h, K_j, con $h, j < i$, tali che K_i sia uno dei loro punti di intersezione;

2. *se K_i è una retta esistono due punti distinti K_h, K_j, con $h, j < i$, tali che K_i sia la retta che li unisce.*

3. *se K_i è una circonferenza esistono due punti K_h, K_j, con $h, j < i$, tali che K_i sia la circonferenza con centro K_h e raggio K_hK_j.*

Per rendere più chiara e semplice l'esposizione sono stati esplicitati la notazione e gli accorgimenti usati nelle varie costruzioni. Per esempio, un'accortezza usata per semplificare la lettura di una costruzione consiste nell'indicare i punti in ordine alfabetico man mano che vengono costruiti, a livello grafico sono stati invece evidenziati con colori diversi i punti di partenza (di colore blu) e la tesi (di colore rosso). Infine, per rendere più compatta e schematica la costruzione della figura geometrica è stata creata una tabella in cui, sulla riga superiore vengono riportate le curve che intersecandosi dallo origine a nuovi punti situati sulla riga inferiore.

In seguito sono state riportate alcune costruzioni elementari che verranno utilizzate nel proseguo dell'elaborato per costruire figure più complesse. Nell'ordine esse sono:

- costruzione del punto medio di un segmento;
- costruzione della perpendicolare ad una retta passante per un suo punto;
- costruzione della perpendicolare ad una retta per un punto esterno ad essa;
- costruzione della parallela ad una retta;
- il teorema 2 del Libro I degli *Elementi* di Euclide che ci consente di trasportare la misura e quindi di poter simulare perfettamente un compasso rigido;
- costruzione della bisettrice di un angolo.

Dopo aver dato una definizione formale delle costruzioni euclidee, intese come successioni di punti, rette e circonferenze fra loro correlate, è necessario esprimere la loro interazione con i punti del piano reale e quindi le proprietà, in termini algebrici di questa struttura, in modo tale da poter tradurre un problema geometrico in uno algebrico e viceversa.

Definizione 2. *Un numero reale α si dice costruibile se con riga, compasso e l'unità di misura fissata, si riesce a costruire un segmento di lunghezza $|\alpha|$.*

Proposizione 1. *Il punto $A \equiv (\alpha, \beta)$ è costruibile se e soltanto se lo sono i punti $B \equiv (\alpha, 0)$ e $C \equiv (\beta, 0)$.*

Definizione 3. *Un numero complesso $a + ib$ è costruibile con riga e compasso se è costruibile il punto $P = (a, b)$ nel sistema di assi fissato.*

Definizione 4. *Sia $\mathfrak{C}$ l'insieme di tutti i punti costruibili a partire da due soli punti (gli estremi dell'unità di misura).*

In seguito sono state analizzate le proprietà dell'insieme dei punti costruibili per arrivare a caratterizzare algebricamente i suoi elementi attraverso il seguente teorema:

Teorema 1. *Un numero complesso α è costruibile con riga e compasso se e solo se esiste una succesione di campi*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{E}_0 \subseteq \mathbb{E}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{E}_n \subseteq \mathbb{E}_{n+1}$$

che soddisfi le due condizioni seguenti:

1) $\alpha \in \mathbb{E}_{n+1}$

2) $[\mathbb{E}_{j+1} : \mathbb{E}_j] \leq 2 \quad j = 0, 1, \ldots, n$

Una sua conseguenza ci fornisce un importante criterio di non costruibilità per i numeri algebrici.

Corollario 1. *Se un numero reale γ soddisfa un polinomio irriducibile di grado n che non è una potenza di 2, allora γ non è costruibile con riga e compasso.*

La grande influenza che immediatamente ebbero gli *Elementi* spinse a cercare di risolvere tutti i problemi di costruzione con il solo uso di riga e compasso, cioè a partire soltanto dai primi tre postulati presenti nell'opera. A dispetto della loro apparente semplicità, i matematici greci ed i successivi si sono posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso non sempre chiaramente risolvibili o irrisolvibili.

Nel secondo capitolo si analizza uno di questi problemi, divenuto celebre nel tempo, il cosiddetto problema della ciclotomia. Esso può essere formulato per mezzo della domanda: *Per quali $n \in \mathbb{N}$ è possibile costruire il poligono regolare di n lati con riga e compasso?*. Che equivale a chiedersi: *In quante parti uguali è possibile dividere una circonferenza?*
La trattazione dell'argomento inizia evidenziando le conoscenze dell'antichità. Negli *Elementi* si trovano, infatti, le costruzioni dei poligoni regolari aventi tre, quattro, cinque, sei e quindici lati. Per di più Euclide, sebbene non in maniera esplicita, delinea già un criterio di costruibilità di tali poligoni nella sua opera.
Egli mostra come, sapendo costruire un poligono regolare di 2^m lati con m intero positivo, attraverso la bisezione dell'angolo sia possibile costruire il poligono regolare di 2^{m+1} lati. A partire, quindi, dal quadrato si costruisce l'ottagono e poi l'esadecagono e così via. Inoltre, nel teorema 16 del Libro IV con la costruzione del pentadecagono, Euclide indica un ulteriore criterio di costruibilità affermando che, se sono costruibili i poligoni regolari di r e s lati, dove r e s sono primi tra loro, allora è costruibile anche il poligono regolare di $r \cdot s$ lati.

Per più di 2000 anni di storia queste rimasero le uniche conoscenze sull'argomento. Il problema di dividere la circonferenza in 7, 9, 11, 17, 19, ... parti uguali fu affrontato senza successo dai geometri antichi, nonché nel Rinascimento da matematici italiani. Il problema tornò attuale quando Guass, esaminando in maniera completa l'equazione ciclotomica e dandone un metodo di risoluzione per radicali per ogni n, riuscì a costruire, nel 1796, un poligono regolare con 17 lati. Succesivamente egli affermò correttamente la possibilità di costruire un poligono regolare con un numero dispari n di lati se e soltanto se n è prodotto di numeri primi di Fermat distinti. Tuttavia Gauss dimostrò soltanto la sufficienza di questa condizione; il viceversa fu poi dimostrato da Pierre Laurent Wantzel, nel 1836, ottenendo, in tal modo, la caratterizzazione completa dei poligoni costruibili (con riga e compasso).

Teorema 2. *Un poligono regolare con n lati è costruibile se e soltanto se i primi dispari che compaiono nella sua fattorizzazione sono primi di Fermat distinti, ossia la fattorizzazione di n è del tipo*

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s$$

con $k \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \cdots, p_s$ numeri primi di Fermat.

Di seguito si presenta la costruzione dell'eptadecagono regolare.

Costruzione dell'eptadecagono regolare

1. Sia dato il segmento AB.
2. Costruire la retta r perpendicolare ad AB e passante per il punto A
3. Prolungare AB nella retta $\mathcal{R}_{AB}$.
4. Costruire il cerchio di centro A e passante per B: $\mathcal{C}_{AB}$.
5. Dall'intersezione del cerchio $\mathcal{C}_{AB}$ con la retta r troviamo il punto C: $\mathcal{C}_{AB} \cap r = \{C\}$.

6. Costruire il punto D su AB in modo tale che AD = 1/4 AB.
7. Tracciare il segmento BD.
8. Costruire il punto E in modo tale che $A\hat{D}E = (1/4)A\hat{D}B$.
9. Tracciare il segmento DE.
10. Costruire il punto F in modo tale che l'angolo $E\hat{D}F = 45°$.

    Per ottenere ciò si può bisecare l'angolo formato da DE con la sua perpendicolare passante per D.
11. Tracciare il segmento DF.
12. Costruire la circonferenza di diametro FB.
13. Dall'intersezione della circonferenza di diametro FB con la retta r si trova il punto G.
14. Costruire la circonferenza di centro E e passante per il punto G.
15. Dall'intersezione fra la circonferenza $\mathcal{C}_{EG}$ e la retta $\mathcal{R}_{AB}$ troviamo i punti H ed I.
16. Costruire la retta m perpendicolare ad $\mathcal{R}_{AB}$ passante per H.
17. Dall'intersezione della retta m con il cerchio $\mathcal{C}_{AB}$ troviamo i punti J e K, primi due vertici dell'eptadecagono.
18. Costruire la retta n perpendicolare ad $\mathcal{R}_{AB}$ passante per I.
19. Dall'intersezione della retta n con il cerchio $\mathcal{C}_{AB}$ troviamo i punti L e M, che corrispondono ad altri due vertici dell'ettadecagono.
20. Costruire il punto medio N dell'arco LJ.
21. Tracciare il segmento JN lato dell'eptadecagono regolare.
22. Riportare il lato JN per trovare i rimanenti vertici dell'eptadecagono.

23. Evidenziare l'eptadecagono NJOPBQRKSMTUVWXYL.

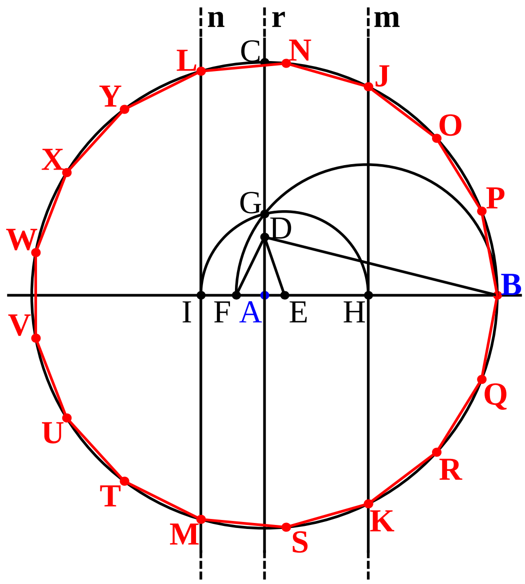


Figura 1: Eptadecagono regolare.

Oltre alla costruzione è stata presentata una semplice dimostrazione della costruibilità di tale poligono, che si rifà all'originale studio effettuato da Gauss.

Successivamente, dopo aver mostrato che il poligono regolare avente sette lati non è costruibile attraverso gli strumenti elementari, in quanto esso richiede la risoluzione di un'equazione di terzo grado, si ammette l'uso di un altro mezzo, la riga marcata, e si effettuata uno studio riguardante la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado. Si osserva, inoltre, che attraverso la riga marcata si possono risolvere anche altri due grandi problemi dell'antichità che sono la trisezione dell'angolo e l'estrazione di radici cubiche.

Proposizione 2. *Utilizzando la riga marcata e il compasso è possibile trisecare un angolo.*

Proposizione 3. *Dati due segmenti di lunghezza* 1 *e* a*, è possibile, con riga marcata e compasso, costruire un segmento di lunghezza* $\sqrt[3]{a}$*.*

Come applicazione dell'utilizzo della riga marcata viene presentata l'elegante costruzione dell'ettagono regolare dovuta a François Viète.

Costruzione dell'ettagono regolare inscritto in una circonferenza

1. Siano dati i punti A e B.

2. Tracciare la circonferenza di centro A e passante per il punto B: $\mathcal{C}_{AB}$.

3. Tracciare la retta passante per i punti A e B: $\mathcal{R}_{AB}$.

4. Sia C il punto d'intersezione tra la retta $\mathcal{R}_{AB}$ ed il cerchio $\mathcal{C}_{AB}$:
   $\mathcal{R}_{AB} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{C\}$.

5. Costruire il cerchio di centro B e passante per A: $\mathcal{C}_{BA}$.

6. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{BA}$ otteniamo i punti D ed E:
   $\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{BA} = \{D, E\}$.

7. Costruire il cerchio di centro E e passante per A: $\mathcal{C}_{EA}$.

8. Costruire il cerchio di centro A e raggio DE: $\mathcal{C}_{A(DE)}$.

9. Sia F il punti d'intersezione fra le due circonferenze $\mathcal{C}_{EA}$ e $\mathcal{C}_{A(DE)}$:
   $\mathcal{C}_{EA} \cap \mathcal{C}_{A(DE)} = \{F\}$.

10. Tracciare la retta passante per i punti D ed F: $\mathcal{R}_{DF}$.

11. Dall'intersezione fra la retta $\mathcal{R}_{DF}$ e la retta $\mathcal{R}_{AB}$ otteniamo il punto G:
    $\mathcal{R}_{DF} \cap \mathcal{R}_{AB} = \{G\}$.
    Osserviamo che $AG = \frac{1}{3}AB$.

12. Costruire il cerchio di centro G e passante per D: $\mathcal{C}_{GD}$.

13. Tracciare la retta passante per i punti D, H, I in modo tale che HI $=$ DG.

14. Costruire il cerchio di centro I e raggio AB: $\mathcal{C}_{I(AB)}$.

15. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{I(AB)}$ otteniamo i punti J ed K: $\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{I(AB)} = \{J, K\}$.

16. Costruire il cerchio di centro C e raggio JK: $\mathcal{C}_{C(JK)}$.

17. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{C(JK)}$ otteniamo i punti L e M: $\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{C(JK)} = \{L, M\}$.

18. Costruire il cerchio di centro C e raggio JM: $\mathcal{C}_{C(JM)}$.

19. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{C(JM)}$ otteniamo i punti N e O: $\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{C(JM)} = \{N, O\}$.

20. Tracciare i segmenti CJ, JL, LN, NO, OM, MK ed KC lati dell'ettagono regolare CJLNOMK.

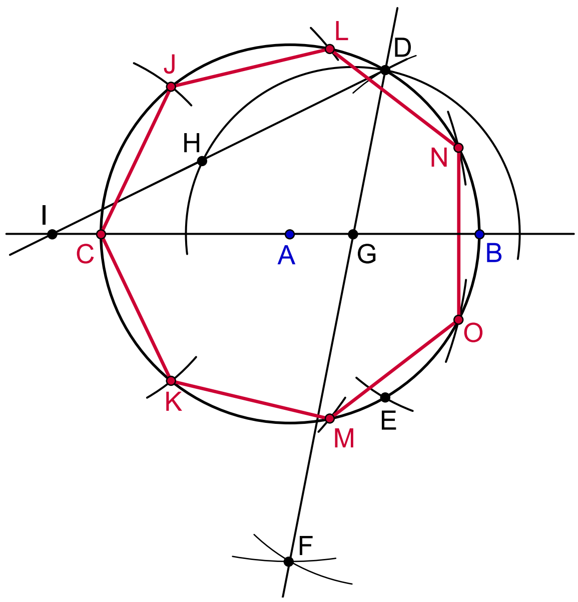


Figura 2: Costruzione dell'ettagono regolare.

	$\mathcal{R}_{AB}$, $\mathcal{C}_{AB}$	$\mathcal{C}_{AB}$, $\mathcal{C}_{BA}$	$\mathcal{C}_{A(DE)}$, $\mathcal{C}_{EA}$	$\mathcal{R}_{DF}$, $\mathcal{C}_{AB}$
A, B	C	D, E	F	G

Con la riga marcata IHD	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{I(AB)}$	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{C(JK)}$	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{C(JM)}$	CJLNOMK
I, H	J, K	L, M	N, O	

Per mezzo dei risultati ottenuti si sono studiate attentamente le radici delle equazioni di terzo e quarto grado per mostrare che, l'uso del compasso e della riga marcata equivale a trovare le radici reali delle suddette equazioni. In questo modo si è arrivati al seguente importante risultato

Teorema 3. *Sia $\mathbb{E}$ un sottocampo di $\mathbb{R}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) Esiste una catena di sottocampi

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \subseteq \mathbb{E}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{E}_k \subseteq \mathbb{R}$$

con $\alpha \in \mathbb{E}_k$ e per ogni i, $\mathbb{E}_i$ si ottiene da $\mathbb{E}_{i-1}$ aggiungendo l'elemento $\beta_i = \beta$ avente le seguenti possibilità:

(1) $\beta = \sqrt{a}$, con $\alpha \in \mathbb{E}_{i-1}$, $a > 0$, oppure

(2) $\beta = \sqrt[3]{a}$, con $a \in \mathbb{E}_{i-1}$, oppure

(3) $\beta = \cos \frac{1}{3}\theta$, con $\cos\theta \in \mathbb{E}_{i-1}$.

(ii) Esiste una catena di sottocampi

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \subseteq \mathbb{E}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{E}_n \subseteq \mathbb{R}$$

con $\alpha \in \mathbb{E}_n$ e $\mathbb{E}_i$ si ottiene da $\mathbb{E}_{i-1}$ unendo una radice di un polinomio quadratico, cubico, o di quarto grado.

(iii) α può essere costruita con compasso e riga marcata con coordinate in $\mathbb{E}$.

Esso ci consente di ampliare il numero dei poligoni costruibili

Corollario 2. *Un poligono regolare di n lati è costruibile con riga marcata e compasso se e solo se n è della forma*

$$n = 2^k 3^l p_1 \dots p_s, \qquad k, l \geq 0,$$

con p_i primi distinti ognuno della forma

$$p_i = 2^{a_i} 3^{b_i} + 1.$$

Dopo aver mostrato che aumentando la varietà degli strumenti usati è possibile risolvere una più vasta classe di problemi di costruzione, si sono riprese le costruzioni degli *Elementi* di Euclide e ci si è domandati se i medesimi problemi non sarebbero ugualmente risolubili restringendo i mezzi grafici a disposizione.

Nel terzo capitolo si è data una risposta al quesito sopra esposto, mostrando due sorprendenti risultati.
Il primo di essi fu ottenuto dall'italiano Mascheroni e dal danese Mohr, i quali arrivarono a dimostrare, in maniera indipendente l'uno dall'altro, che

Teorema 4 (di Mascheroni-Mohr)**.** *Ogni costruzione eseguibile con riga e compasso è eseguibile con il solo compasso.*

Per poter dimostrare il teorema si ha bisogno di alcune costruzioni 'preliminari'. Si è infatti osservato che, mentre trovare i punti d'intersezione di due circonferenze è immediato in questa teoria, per poter trovare i punti d'intersezione fra una retta e una circonferenza o fra due rette si necessita di costruzioni apposite, non presenti nei libri di Euclide. Fra di esse due rivestono un ruolo fondamentale: la simmetria rispetto ad una retta, che permette di trovare la perpendicolare ad una retta rispetto ad un punto esterno, e l'inversione rispetto ad un cerchio, grazie alla proprietà di trasformare rette in cerchi e viceversa.
A tal proposito le costruzioni analizzate sono le seguenti:

- asse di un segmento;
- perpendicolare ad una retta per un punto esterno o simmetrico di un punto rispetto ad una retta;
- trasporto della misura;
- doppio di un segmento;
- multipli interi di un segmento;
- inverso di un punto rispetto ad una circonferenza;
- centro del cerchio passante per tre punti;
- punto medio di un segmento;
- bisezione di un arco.

E' stata mostrata, inoltre, la costruzione dell'esagono regolare e, più interessante, quella del pentagono regolare di seguito riportata.

Costruzione del pentagono regolare

1. Siano dati due punti A e B.
2. Tracciare il cerchio di centro A e passante per B: $\mathcal{C}_{AB}$.
3. Partendo da B costruire gli altri vertici dell'esagono regolare C, E, G, F, e D (costruzione 3.1.3) evidenziati dal colore viola.
4. Costruire il cerchio di centro G e passante per C: $\mathcal{C}_{GC}$ (colore nero).
5. Costruire il cerchio di centro B e passante per E: $\mathcal{C}_{BE}$ (colore nero).
6. Sia H e I i punti d'intersezione delle due circonferenze $\mathcal{C}_{GC}$ e $\mathcal{C}_{BE}$: $\mathcal{C}_{GC} \cap \mathcal{C}_{BE} = \{H, I\}$ (colore nero).

7. Costruire il cerchio di centro H e raggio AB: $\mathcal{C}_{H(AB)}$ (colore verde).
8. Siano J e K, colorati di verde, i punti d'intersezione delle circonferenze $\mathcal{C}_{H(AB)}$ e $\mathcal{C}_{AB}$: $\mathcal{C}_{H(AB)} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{J, K\}$.
9. Costruire il cerchio di centro I e raggio AB: $\mathcal{C}_{I(AB)}$ (colore verde).
10. Siano L ed M, colorati di verde, i punti d'intersezione delle circonferenze $\mathcal{C}_{I(AB)}$ e $\mathcal{C}_{AB}$: $\mathcal{C}_{I(AB)} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{L, M\}$.
11. Costruire la circonferenza di centro B e raggio HA : $\mathcal{C}_{B(HA)}$ (colore rosa).
12. Dall'intersezione delle circonferenze $\mathcal{C}_{B(HA)}$ e $\mathcal{C}_{AB}$ otteniamo i punti N e O: $\mathcal{C}_{B(HA)} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{N, O\}$ (colore rosa).
13. Costruire la circonferenza di centro N e raggio AB : $\mathcal{C}_{N(AB)}$ (colore celeste).
14. Dall'intersezione delle circonferenze $\mathcal{C}_{N(AB)}$ e $\mathcal{C}_{AB}$ otteniamo i punti P e Q: $\mathcal{C}_{N(AB)} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{P, Q\}$ (colore celeste).
15. Costruire la circonferenza di centro O e raggio AB : $\mathcal{C}_{O(AB)}$ (colore giallo).
16. Dall'intersezione delle circonferenze $\mathcal{C}_{O(AB)}$ e $\mathcal{C}_{AB}$ otteniamo i punti S e R: $\mathcal{C}_{O(AB)} \cap \mathcal{C}_{AB} = \{S, R\}$ (colore giallo).
17. Costruire la circonferenza di centro Q e raggio HA: $\mathcal{C}_{Q(HA)}$ (colore marrone).
18. Costruire la circonferenza di centro P e raggio HA: $\mathcal{C}_{P(HA)}$ (colore marrone).
19. Sia T il punto d'intersezione fra i due cerchi $\mathcal{C}_{P(HA)}$ e $\mathcal{C}_{Q(HA)}$: $\mathcal{C}_{P(HA)} \cap \mathcal{C}_{Q(HA)} = \{T\}$ (colre marrone). Il segmento BT ha la stessa lunghezza del lato del pentagono.
20. Costruire la circonferenza di centro B e passante per T: $\mathcal{C}_{BT}$ (colore rosso).
21. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{BT}$ otteniamo i punti U e V: $\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{BT} = \{U, V\}$ (colore rosso).

22. Costruire la circonferenza di centro U e passante per B: $\mathcal{C}_{UB}$ (colore rosso).

23. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{UB}$ otteniamo il punto W:
$\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{UB} = \{W\}$ (colore rosso).

24. Costruire la circonferenza di centro V e passante per B: $\mathcal{C}_{VB}$ (colore rosso).

25. Dall'intersezione dei due cerchi $\mathcal{C}_{AB}$ e $\mathcal{C}_{VB}$ otteniamo il punto Z:
$\mathcal{C}_{AB} \cap \mathcal{C}_{VB} = \{Z\}$ (colore rosso).

26. I punti U, B, V, Z, W corrispondono ai vertici del pentagono regolare inscritto nella circonferenza.

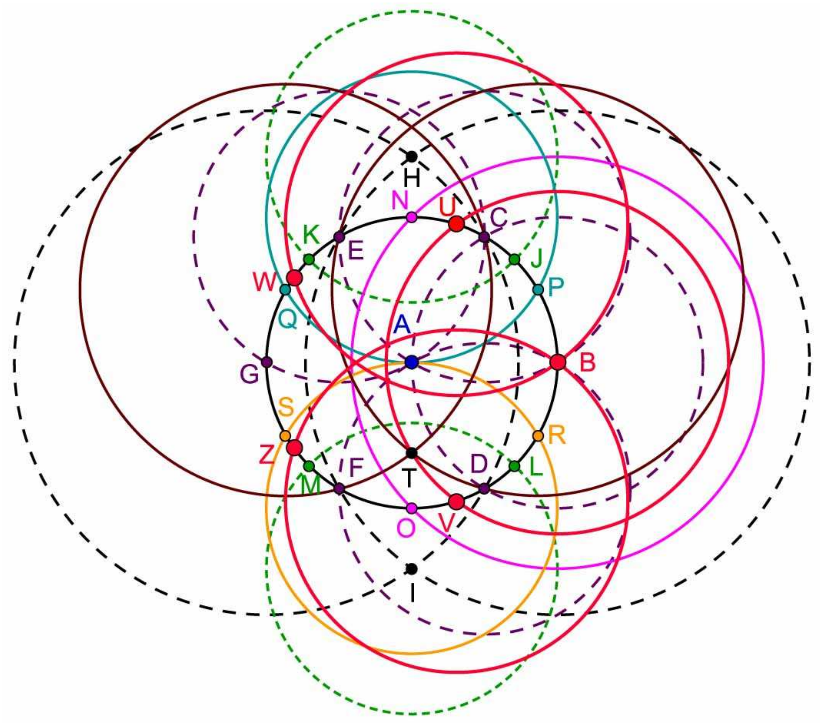


Figura 3: Costruzione del pentagono regolare UBVZW con il solo compasso.

	applicare costruzione 3.1.3	$\mathcal{C}_{GC}$, $\mathcal{C}_{BE}$	$\mathcal{C}_{H(AB)}$, $\mathcal{C}_{AB}$	$\mathcal{C}_{I(AB)}$, $\mathcal{C}_{AB}$
A, B	C, E, G, F, D	H, I	J, K	L, M

	$\mathcal{C}_{B(HA)}, \mathcal{C}_{AB}$	$\mathcal{C}_{N(AB)}, \mathcal{C}_{AB}$	$\mathcal{C}_{O(AB)}, \mathcal{C}_{AB}$	$\mathcal{C}_{P(HA)}, \mathcal{C}_{Q(HA)}$	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{BT}$
	N, O	P, Q	S, R	T	U, V

	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{UB}$	$\mathcal{C}_{AB}, \mathcal{C}_{VB}$	UBVZW
	W	Z	

Cercando un analogo del risultato di Mascheroni-Mohr relativamente alla sola riga ci si può convincere subito che ciò non sia possibile, in quanto utilizzando unicamente questo strumento si possono costruire solamente curve lineari, rimanendo in tal modo nel campo di definizione delle curve. Ciò che invece è stato dimostrato dai matematici Poncelet e Steiner è il seguente risultato

Teorema 5 (di Poncelot-Steiner)**.** *Ogni costruzione con riga e compasso può essere effettuata con la sola riga e un cerchio fissato.*

Precisamente questo risultato fu dimostrato da Steiner nel 1833. Come nel caso precedente per poter dimostrare il teorema principale si ha bisogno di alcuni passi preliminari rappresentati dalle costruzioni:

- parallela ad una retta per un punto esterno ad essa.
  Steiner divide la costruzione in due casi, nel primo vengono date come ipotesi oltre alla retta, due punti ad essa appartenenti e il punto medio fra di essi, nel secondo invece, si ha soltanto una retta arbitraria;

- il trasporto della misura;

- la perpendicolare ad una retta per un punto esterno ad essa;

- dato un segmento costruire da un punto un segmento di pari lunghezza, in una data direzione;

- dati i segmenti di lunghezza a, b, c costruire un segmento di lunghezza $(a/b) \cdot c$;

- dati i segmenti di lunghezza a e b, costruire un segmento di lunghezza $\sqrt{ab}$.

Le costruzioni con riga e compasso hanno avuto un posto particolare nell'insegnamento della geometria. Per secoli sono state al centro della didattica, poi dimenticate, ed infine riscoperte negli ultimi anni grazie anche all'uso di attrattivi software didattici.

Nel quarto capitolo viene data una proposta didattica, indirizzata agli studenti della prima media, dal titolo 'La matematica nelle costruzioni con riga e compasso'.
Durante il primo anno della scuola secondaria di primo grado gli studenti, all'interno del corso di educazione tecnica, svolgono diverse costruzioni euclidee in cui, normalmente, viene data importanza solo al 'procedimento di costruzione' senza sottolineare il rapporto tra l'oggetto da costruire e la teoria di riferimento.
Nonostante riga e compasso siano strumenti obsoleti dal punto di vista pratico, il loro valore teorico è ancora intatto: si tratta del valore indotto dai vincoli di risolvere un problema dato con strumenti ben precisati. Tali costruzioni costituiscono, infatti, un buon contesto per introdurre gli studenti alla geometria come sistema teorico, affrontare i problemi di costruzione consente la nascita del bisogno intellettuale di validare le procedure di costruzione e quindi la nascita di motivazioni all'attività dimostrativa.
Questo progetto è stato pensato, quindi, come una collaborazione interdisciplinare tra l'insegnante di educazione tecnica e l'insegnante di matematica, allo scopo di facilitare gli allievi nella comprensione dei fondamenti teorici alla base delle istruzioni meccaniche presenti nella costruzione della figura, sottolineando che dietro ogni costruzione c'è un teorema di geometria.
Verrà quindi chiesto allo studente di motivare ogni passo della costruzione, di evidenziarne la tesi ed infine di giustificarla. Dato che quest'ultima operazione potrebbe non essere eseguibile dalla classe (nel caso l'insegnante non avesse ancora

affrontato alcuni argomenti quali, per esempio, i criteri di congruenza), sono state inserite delle ore di laboratorio per mezzo del software didattico GeoGebra. Attraverso questo semplice software gli studenti potranno verificare la correttezza della costruzione ed evidenziarne anche le proprietà. Per di più rispetto all'ambiente 'carta e matita', attraverso il computer gli alunni possono 'toccare con mano' gli argomenti trattati ed essere stimolati ad una maggiore comprensione ed apprendimento. Per mezzo del comando 'Muovi' essi hanno la possibilità di 'giocare' con l'immagine verificando immediatamente cosa accadrebbe modificando semplicemente un parametro, senza dover ricominciare nuovamente il disegno.
Per poter svolgere il suddetto lavoro l'insegnante di matematica dovrà spiegare i concetti fondamentali della geometria: assioma, teorema e dimostrazione, concetti che in prima media sono quasi sconosciuti.
Per questo progetto sono state preparate nove schede didattiche, una riassuntiva e otto riguardanti le seguenti costruzioni:

- il triangolo equilatero dato il lato;
- la bisettrice di un angolo;
- il punto medio di un segmento;
- la perpendicolare ad una retta passante per un suo punto;
- la perpendicolare ad una retta per un punto esterno ad essa;
- la parallela ad una retta;
- il quadrato dato il lato;
- il pentagono regolare dato il lato (quest'ultima più complicata rispetto alle precedenti).

Nelle successive pagine vengono riportate la scheda riassuntiva e la prima scheda didattica relativa alla costruzione del triangolo equilatero.

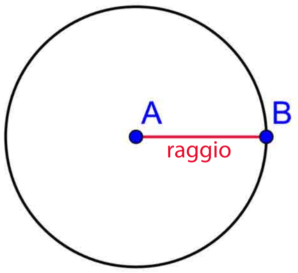
SCHEDA RIASSUNTIVA

STRUMENTI

RIGA NON MARCATA: asta rigida che permette solo di tracciare rette e non di misurare o segnare distanze. (righello senza le tacche di misurazione)

COMPASSO "MOLLE" la cui apertura, non riutilizzabile, è determinato da un segmento dato in precedenza.

CIRCONFERENZA



A= centro della circonferenza

B= punto della circonferenza

Qualunque segmento che unisce un punto della circonferenza con il centro è detto raggio.

AB= raggio della circonferenza

- Di raggi in un cerchio ne esitsono infiniti aventi TUTTI la STESSA LUNGHEZZA

POSTULATI

POSTULATI DELLA RIGA

P 1) Per due punti passa un'unica retta.

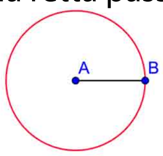
P 2) Ogni segmento si può prolungare in modo unico in una retta.

POSTULATO DEL COMPASSO

P 3) Dato un segmento esiste il cerchio di centro un estremo e raggio quel segmento.

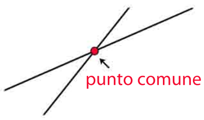
OPERAZIONI FONDAMENTALI

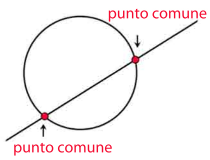
1. Dati due punti e tracciare la retta passante per essi.



2. Dati due punti A e B tracciare la circonferenza di centro A e passante per B.

3. Determinare l'eventuale punto di intersezione fra due rette.





4. Determinare gli eventuali punti di intersezione fra una circonferenza e una retta.

5. Determinare gli eventuali punti di intersezione fra due circonferenze.

GIUSTIFICAZIONI

Ogni passaggio logico di una dimostrazione dev'essere giustificato.
Le giustificazioni ammesse sono:

1) "Per ipotesi"	(l'ipotesi del teorema)
2) "Per il postulato"	(un postulato del sistema)
3) "Per il teorema"	(un teorema dimostrato precedentemente)
4)"Per il passo"	(un passo precedente della dimostrazione)

TEOREMI DIMOSTRATI

TEOREMA 1:

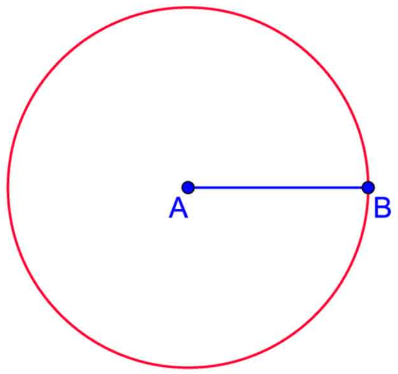
COSTRUIRE IL TRIANGOLO EQUILATERO, DATO IL LATO

COSTRUZIONE

1. Sia dato il lato AB.

1. Con il comando tracciare il segmento AB.

GIUSTIFICAZIONE: ....

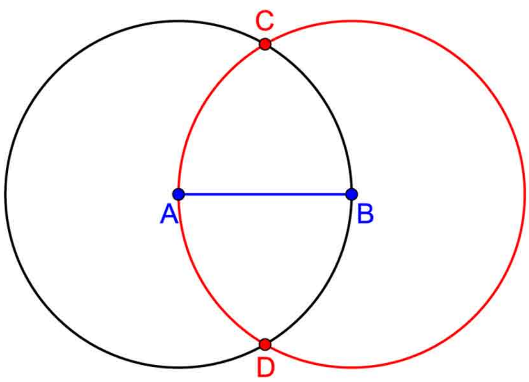


COSTRUZIONE

2. Con centro in A, aprire il compasso fino in B e tracciare la circonferenza.

2. Con il comando tracciare la circonferenza di centro A e passante per B.

GIUSTIFICAZIONE: ....

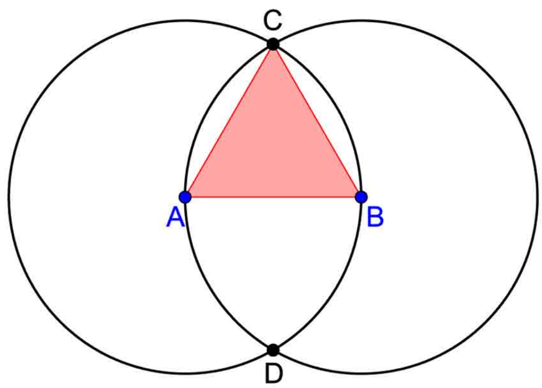


COSTRUZIONE

3. Con centro in B, aprire il compasso fino in A e tracciare la circonferenza, che interseca la precedente nei punti C e D.

3. Con il comando tracciare la circonferenza di centro B e passante per A. Con il comando determina i punti C e D d'intersezione fra le due circonferenze.

GIUSTIFICAZIONE: ....



COSTRUZIONE

4. Tracciare il triangolo equilatero ABC.

4. Con il comando tracciare il triangolo equilatero ABC.

GIUSTIFICAZIONE: ....

a) Qual è la tesi ? ....

b) Perché il triangolo ottenuto è equilatero? ....

....

VERIFICA: - Con il comando visualizza la misura i lati AC, CB e AB.

- Con il comando visualizza la misura degli angoli.

• Con il comando muovi A e B ed osserva le variazioni della figura e delle misure.

Bibliografia

[1] Gabriele Giannantoni *I Cirenaici, raccolta delle fonti antiche; traduzione e studio introduttivo* Firenze: G.C. Sansoni, 1958.

[2] Richard Trudeau *La rivoluzione non euclidea* Bollati Boringhieri, 2004.

[3] Morris Kline *Storia del pensiero matematico. Vol.* 1*: Dall'antichità al Settecento* Einaudi, 1999.

[4] Richard Klimpert *Storia della geometria ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie* Laterza, 1901.

[5] Ana Millán Gasca *All' inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza* Mimesis, 2004.

[6] Stefania Gabelli *Teoria delle equazioni e teoria di Galois* Springer, 2008.

[7] Claudio Procesi *Elementi di teoria di Galois* Zanichelli, 1977.

[8] Giulia Maria Piacentini Cattaneo *Algebra: un approccio algoritmico* Decibel, 1996.

[9] Richard Courant *Che cos'è la matematica?: introduzione elementare ai suoi concetti e metodi* Bollati Boringhieri, 1995.

[10] Robin Hartshorne *Geometry: Euclid and Beyond* Springer, 2000.

[11] Dörrie Heinrich *100 great problems of elementary mathematics: their history and solutions* Dover, 1965.

[12] Benjamin Bold *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them* Dover, 1982.

[13] Enriques Federigo *Questioni riguardanti le matematiche elementari, Vol. I* Zanichelli, 1983.

[14] Enriques Federigo *Questioni riguardanti le matematiche elementari, Vol. II* Zanichelli, 1983.

[15] *http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Ottobre_06/MateCivilta1.htm*

[16] *http://web.unife.it/utenti/fabio.stumbo/didattica/varie/costruzioni.pdf*

[17] *http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/EekhoffMSMSS07.pdf*

[18] *http://www.mathesisnazionale.it/archivio-storico-articoli-mathesis/dalla-geometria-greca-alle-tic.pdf*

[19] *http://www.matematica.it/paola/Congetture%20e%20dimostrazioni%20finale.pdf*

[20] *http://www.geogebra.org/en/upload/files/italian/Simona_mathmum/Riga_Compasso/Riga_Comp_GeoGebra.html*

[21] *http://www.matematicamente.it/approfondimenti/tesi_di_laurea/tre_problemi_immpossibili_201201027712/*

[22] *http://www.seminariodidama.unito.it/2010/1996_Mar.pdf*

[23] *http://www.geogebraitalia.org/pdf/libro_mascheroni.pdf*

[24] *http://www.matematicamente.it/shop/balsimelli-geogebra-pagine.pdf*